

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

Кафедра «Информационно-измерительная техника»

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Самара  
Самарский государственный технический университет  
2014

Печатается по решению Методического совета факультета автоматизации и информационных технологий СамГТУ

УДК 621.391:621.317

Составитель Р.Т. Сайфуллин

Преобразование измерительных сигналов: учебно-метод. Пособие. Часть 1 / Сост. Р.Т. Сайфуллин.- Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014, - 48 с.

Изложены теоретические положения преобразования измерительных сигналов, которые являются основой при построении средств измерения с использованием современных информационных технологий.

В первой части рассматриваются способы представления измерительных сигналов и их математические модели, а также корреляционный анализ детерминированных сигналов.

Предназначены для бакалавров направления 12.03.01 «Приборостроение» очной и заочной формы обучения.

Рецензент: д-р техн. наук В.Н. Якимов

УДК 621.391:621.317

## **ВВЕДЕНИЕ**

Область профессиональной деятельности по специальности 200106 «Информационно-измерительная техника и технологии» включает исследования, разработки и технологии, направленные на развитие теории, проектирование и применение приборов и систем, предназначенных для получения, регистрации и обработки информации об окружающей среде, биологических и технических объектах. Дисциплина «Преобразование измерительных сигналов» является одной из основополагающих дисциплин по данной специальности.

В данной дисциплине изложены теоретические положения преобразования измерительных сигналов, которые являются основой для построения любых средств измерения с применением как традиционных, так и современных технологий.

Первая часть пособия посвящена способам представления измерительных сигналов и их математическим моделям. Рассматривается линейное пространство сигналов, представление сигналов в комплексной форме, контурный и каркасный способы описания сигналов в виде колоколообразных импульсов. Во второй главе дано описание корреляционного анализа детерминированных сигналов.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

## 1.1. Основные виды сигналов. Математические модели

Слово «сигнал» происходит от латинского «*signum*» - «знак» и имеет широкий смысл. В обычном понимании сигнал отражает состояние физической системы.

*Сигналом* называют процесс изменения во времени или в пространстве физического состояния какого-либо объекта или среды, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений (информации) [1,2]. Теоретический анализ сигналов различной физической природы возможен, если выбран способ их математического описания. Математической моделью сигнала является адекватная функциональная зависимость от временного и пространственного аргументов.

*Многомерный сигнал* – упорядоченная совокупность одномерных сигналов. Размерность сигнала определяется числом описывающих его независимых функций.

Пример многомерного сигнала – система напряжений на выходе многополюсника (рис.1.1):

$$s(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)\} \quad (1.1)$$

где  $N$  – размерность сигнала. В общем случае сигналы с разным порядком следования компонент не равны друг другу  $\{s_1, s_2\} \neq \{s_2, s_1\}$ .

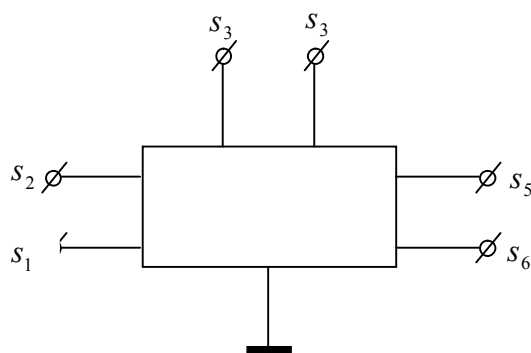


Рис. 1.1. Пример формирования многомерного сигнала

*Детерминированный сигнал* описывается функциональной зависимостью, позволяющей точно установить его параметры при

заданном значении аргумента. *Случайный сигнал* статистически связан со значением аргумента. Для описания *случайных сигналов* используют вероятностный подход, при котором сигналы рассматриваются как случайные процессы. Как правило, случайные сигналы представляют собой хаотические функции времени.

*Импульсный сигнал* существует на конечном интервале значений аргумента (временного или пространственного). Для сигналов, зависящих от времен, различают видеоимпульсы (рис. 1.2а) и радиоимпульсы (рис. 1.2б) [2]. Если  $S_v(t)$  - видеоимпульс, то ему соответствует радиоимпульс  $S_r(t) = S_v(t) \cos(\omega t + \varphi)$ . Радиоимпульсы отличаются от видеоимпульсов заполнением  $\cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\omega$  - частота,  $\varphi$  - фаза. Параметры, характеризующие импульсный сигнал, показаны на рис. 1.2в, где  $A$  – амплитуда;  $\tau_s, \tau_f, \tau_c$  - длительность импульса, фронта и среза соответственно.

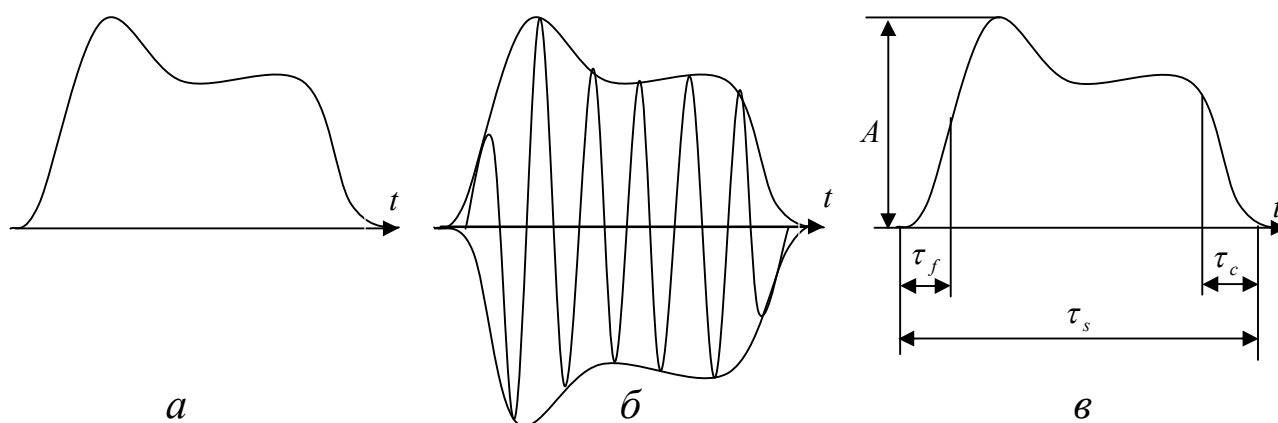


Рис. 1.2. Импульсные сигналы и их характеристики:

а - видеоимпульс, б - радиоимпульс, в - определение числовых параметров

Различают *аналоговые, дискретные и цифровые сигналы*:

*Аналоговый сигнал* является непрерывной функцией аргумента. *Дискретный сигнал* определяется на счетном множестве значений аргумента. Интервал между соседними значениями аргумента называется шагом дискретизации. *Цифровой сигнал* – разновидность дискретного, представленного в отсчетных точках в виде чисел.

## Математические модели сигналов

*Математическая модель* – это приближенное описание сигнала в форме, наиболее пригодной для проводимого исследования. Математическое описание сигнала всегда является его некоторой идеализацией, поскольку оно отражает лишь отдельные свойства сигнала, наиболее существенные для данного исследования. Зная математические модели сигналов, можно проводить сравнение сигналов друг с другом для выявления их сходства и различия.

Рассмотрение реальных сигналов как детерминированных во многих случаях является оправданным. Оно позволяет получить более ясное представление о свойствах и характеристиках реальных сигналов. Кроме того, проведенные на основе такого рассмотрения расчеты дают количественные результаты, которые могут быть использованы для оценки характеристик реальных сигналов. Методы анализа детерминированных сигналов пригодны для решения многих практических задач. Детерминированные сигналы делят на периодические и непериодические [3]. *Периодические сигналы* характеризуются следующим свойством:

$$s(t) = s(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

Здесь  $T$  – период сигнала (рис. 1.3); величина  $f = 1/T$  – частота повторения сигнала  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота.

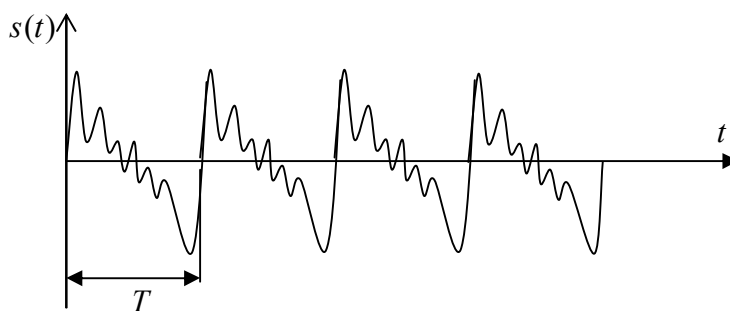


Рис. 1.3. Периодический сигнал

При описании периодических сигналов функция  $s(t)$  должна быть задана для всех значений переменной  $t$ . Однако фактически вид функции  $s(t)$  должен быть известен только в пределах промежутка времени, равному периоду  $T$ .

Примеры периодических сигналов (рис. 1.4): периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а), пилообразный сигнал (б), периодическая последовательность треугольных импульсов (в).

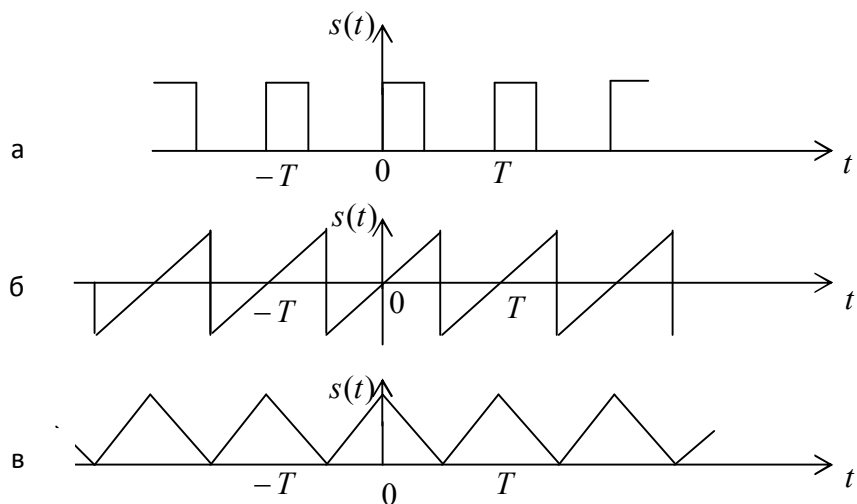


Рис.1.4. Виды периодических сигналов: последовательность прямоугольных импульсов (а); пилообразный сигнал (б); последовательность треугольных импульсов (в)

К *непериодическим* сигналам относят все сигналы, не удовлетворяющие условию (1.2). На рис. 1.5 приведены некоторые виды непериодических сигналов – это одиночный импульс (а), затухающий сигнал (б) и группа (пачка) прямоугольных импульсов (в).

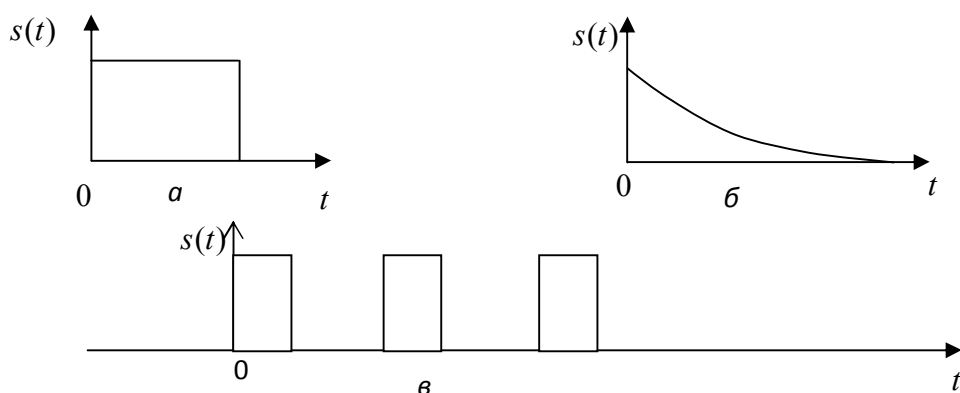


Рис. 1.5. Виды непериодических сигналов: прямоугольный импульс (а), затухающий сигнал (б), пачка прямоугольных импульсов (в)

Одним из основных параметров сигнала является его длительность. Однако при описании сигналов иногда используют функции, заданные на полубесконечном  $0 < t < \infty$  или бесконечном  $-\infty < t < \infty$  интервале времени. В этих случаях вводится понятие *эффективной* (практической) длительности сигнала. Применяются различные способы ее определения.

Пусть затухающий сигнал (см. рис. 1.5, б) описан экспоненциальной функцией:

$$s(t) = Ue^{-at}, t \geq 0. \quad (1.3)$$

Определим его эффективную длительность  $\tau_c$  из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала:

$$e^{-a\tau_c} = 0,1, \text{ откуда } \tau_c = 2,303/a.$$

## 1.2. Энергия и мощность сигналов

Электрический сигнал можно представить как напряжение  $u(t)$  или ток  $i(t)$  с мгновенной мощностью  $p(t)$ , выделяемой на резисторе с сопротивлением  $R$ :

$$p(t) = u^2(t)/R, \quad p(t) = i^2(t)R. \quad (1.4)$$

В теории сигналов мощность, как правило, нормируется (предполагается, что сопротивление равно 1 Ом). В нормированном случае уравнения (1.4) имеют одинаковый вид. Следовательно, вне зависимости от того, представлен сигнал через напряжение или ток, нормированная форма позволяет выразить мгновенную мощность как:

$$p(t) = s^2(t), \quad (1.5)$$

где  $s(t)$  – это напряжение или ток.

Энергию, выделяемую за интервал времени  $[0, T]$  сигналом с мгновенной мощностью (1.5), вычисляют по формуле:

$$E = \int_0^T p(t)dt = \int_0^T s^2(t)dt. \quad (1.6)$$

Средняя мощность, выделяемая сигналом в течении этого интервала, равна:



$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.7)$$

Периодические сигналы характеризуются мощностью, а непериодические – энергией. В качестве моделей реальных сигналов применяют периодические сигналы с ненулевой конечной мощностью ( $0 < P < \infty$ ) и непериодические сигналы с ненулевой конечной энергией ( $0 < E < \infty$ ).

**Пример 1.1.** Определим энергию затухающего сигнала, изображенного на рис. 1.5, б. Подставляя (1.3) в выражение (1.6), находим:

$$E = U^2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{U^2}{2a}.$$

Можно определить эффективную длительность затухающего сигнала как интервал времени  $[0, \tau_c]$ , внутри которого сосредоточено 90 % его энергии. Это условие выглядит так:

$$\int_0^{\tau_c} e^{-2at} dt = \frac{0,9}{2a}.$$

Вычислив интеграл, после преобразований, получим:  $e^{-2a\tau_c} 0,1$ , откуда  $\tau_c = 1,5/a$ .

**Пример 1.2.** Определим энергию цифрового сигнала. Пусть на интервале времени  $[0, T]$  цифровой сигнал представлен прямоугольным импульсом, энергия которого определяется как:

$$E_1 = U^2 \int_0^T dt = U^2 T,$$

где  $U$  – амплитуда импульса.

Допустим, что на интервале времени  $[0, NT]$  имеется  $n$  прямоугольных импульсов (двоичных единиц). Тогда энергия цифрового сигнала будет равна:

$$E = nE_1 = nU^2 T,$$

средняя мощность:

$$P = \frac{E}{NT} = \frac{n}{N} U^2.$$

### Энергия и мощность суммы сигналов.

Рассмотрим два сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , заданные на интервале времени  $[0, T]$ . Энергия и мощность суммы сигналов составит:

$$E = \int_0^T [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = E_1 + E_2 + 2E_{12}; \quad (1.8)$$

$$P = \int_0^T [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt = P_1 + P_2 + 2P_{12}. \quad (1.9)$$

Здесь  $E_1$ ,  $P_1$  и  $E_2$ ,  $P_2$  – энергия и мощность соответственно первого и второго сигналов;

$$E_{12} = \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt \quad (1.10)$$

– взаимная энергия двух сигналов;

$$P_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt \quad (1.11)$$

– взаимная средняя мощность.

При взаимной энергии  $E_{12} = 0$  или взаимной мощности  $P_{12} = 0$  сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  на интервале времени  $[0, T]$  называют *ортогональными*. Учитывая формулы (1.10) и (1.11), запишем условие ортогональности:

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0. \quad (1.12)$$

Для ортогональных сигналов выражения (1.8) и (1.9) принимают вид:

$$E = E_1 + E_2, \quad P = P_1 + P_2.$$

Понятие ортогональности сигналов обязательно связано с

интервалом их определения. Например, сигналы  $s_1(t) = \sin \omega t$  и  $s_2(t) = 2 \sin \omega t$  ортогональны на любом интервале времени, где укладывается целое число полупериодов  $n\pi / \omega$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . На другом интервале эти же сигналы не ортогональны.

**Пример 1.3.** Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  представляют собой импульсы одинаковой длительности  $T$  (рис. 1.6)

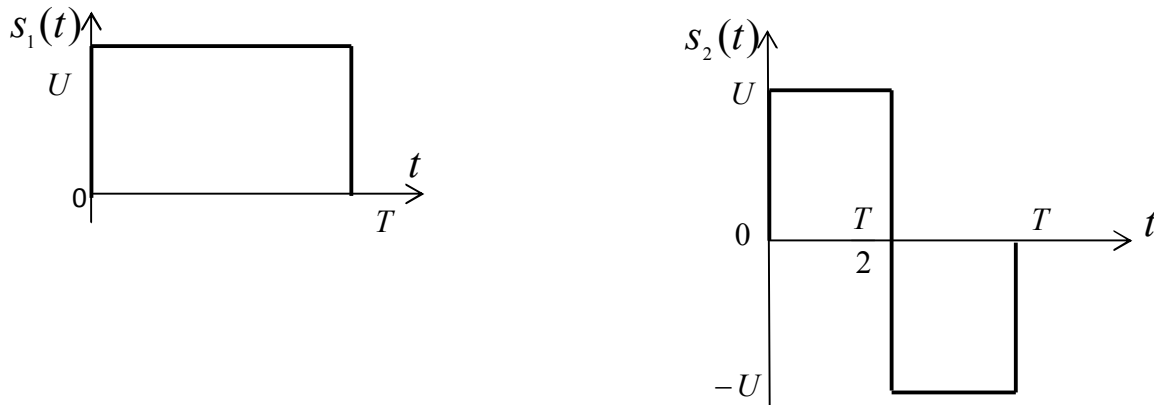


Рис. 1.6. Ортогональные сигналы

Определим взаимную энергию этих сигналов:

$$E_{12} = U^2 \int_0^{T/2} dt - U^2 \int_{T/2}^T dt = 0$$

Следовательно, данные сигналы ортогональны.

**Пример 1.4.** Пусть сигнал  $s_1(t)$  представляет собой отрезок синусоиды длительности  $T$ :  $s_1(t) = U \sin(2\pi t / T)$  при  $0 < t < T$ , а в качестве сигнала  $s_2(t)$  вновь возьмем импульс, изображенный на рис. 1.6.

Взаимная энергия этих сигналов равна:

$$E_{12} = U^2 \int_0^{T/2} \sin(2\pi t / T) dt - U^2 \int_{T/2}^T \sin(2\pi t / T) dt = 2U^2 T / \pi .$$

Следовательно, данные сигналы не ортогональны.

### 1.3 Линейное пространство сигналов

Пусть  $M = \{s_1(x), s_2(x), \dots, s_N(x)\}$  - некоторое множество сигналов, объединенных каким-то общим свойством. Отличительные свойства сигналов выявляются, если прослеживается взаимосвязь отдельных сигналов, входящих в множество  $M$ .

**Структура линейного множества сигналов.** Вещественное линейное множество сигналов должно удовлетворять следующим условиям:

1. Любой сигнал  $s \in M$  при любых значениях аргумента  $s \in M$  может принимать лишь вещественные значения.

2. Для любых  $s \in M$  и  $v \in M$  существует их сумма  $w = s + v$ , причем  $w$  также содержится в  $M$ ,  $w \in M$ . При этом операция суммирования коммутативна

$$u + v = v + u$$

и ассоциативна

$$u + (v + s) = (u + v) + s.$$

3. Для любого сигнала  $s \in M$  и любого вещественного числа  $\alpha$  определен сигнал  $\alpha \cdot s \in M$ .

4. Множество  $M$  содержит нулевой элемент  $\emptyset$  такой, что  $s + \emptyset = s$  для всех  $s \in M$ . В случае, если математические модели сигналов допускают комплексные значения, а свойство 3 допускает умножение на комплексное число, можно говорить о комплексном линейном множестве сигналов.

**Пример 1.5** Множество  $M$  образовано сигналами, амплитуды  $s$  которых не превосходят  $s_0$ . Можно ли считать данное множество  $M$

линейным? Ответ будет отрицательным, так как  $\sum_i^n s_i$  может быть больше  $s_0$ .

**Нормированное линейное множество сигналов.** Линейное пространство  $L$  является нормированным, если каждому сигналу  $s \in L$  однозначно сопоставлено число  $\|s\|$  - норма этого сигнала. При этом должны выполняться следующие аксиомы:

1. Норма неотрицательна, т.е.  $\|s\| \geq 0$ , причем  $\|s\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $s = \emptyset$ .

2. Для любого числа  $\alpha$  справедливо равенство  $\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$ .

3. Если  $s$  и  $p$  – два элемента из  $L$ , то выполняется неравенство треугольника  $\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|$ .

Норма сигнала является аналогом длины вектора в векторном пространстве. Для вещественных сигналов

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx}.$$

Комплексные сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s s^* dx},$$

где  $*$  означает комплексное сопряжение.

Энергия сигнала определяется как квадрат нормы

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) dx.$$

**Пример 1.6.** Найти энергию  $E_s$  и норму сигнала  $s(x)$ , представляющего импульс треугольной формы (рис.1.7):  $s(x) = s_0 x / x_0$ ,  $0 \leq x \leq x_0$ .

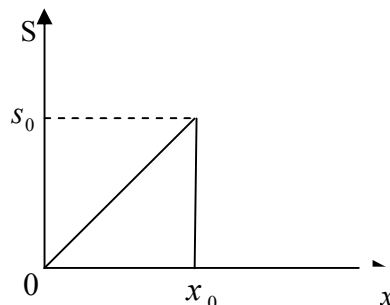


Рис. 1.7. Импульс треугольной формы

$$E_s = \frac{s_0^2}{x_0^2} \int_0^{x_0} x^2 dx = \frac{s_0^2 x_0}{3}, \quad \|s\| = \frac{s_0 \sqrt{x_0}}{\sqrt{3}}.$$

**Метрическое пространство.** Нормированное линейное множество сигналов является метрическим, если каждой паре элементов  $u, v \in L$  может быть сопоставлено неотрицательное число  $\rho(u, v)$ , называемое метрикой. Метрика трактуется как расстояние между элементами. Поэтому множество сигналов, в котором задана метрика, приобретает геометрические свойства. Метрика независимо от способа ее определения должна подчиняться аксиомам метрического пространства:

- 1)  $\rho(u, v) = \rho(v, u)$  (рефлексивность метрики);
- 2)  $\rho(u, v) = 0$  при любых  $u \in L$ ;
- 3) для любого элемента  $w \in L$ ;  $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v)$ .

Обычно метрику определяют как норму разности двух сигналов:  $\rho(u, v) = \|u - v\|$ . Норма, в свою очередь, может определяться как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом  $\|u\| = \rho(u, \emptyset)$ . Понятие метрики позволяет судить о том, насколько хорошо один из сигналов аппроксимирует другой. Нормированное линейное множество сигналов, в котором определена метрика, называют метрическим пространством.

**Пример 1.7.** Сигнал  $s(x)$  представляет собой отрезок синусоиды на интервале  $[0, x_0]$ :  $s(x) = s_0 \sin \frac{\pi x}{x_0}$ ,  $0 \leq x \leq x_0$  (рис. 1.8).

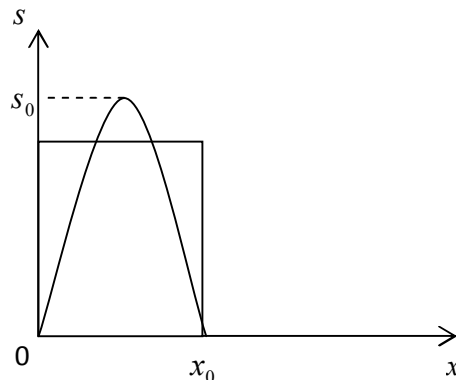


Рис. 1.8. Синусоидальный сигнал на интервале  $[0, x_0]$

Выбрать амплитуду  $A$  прямоугольного импульса той же длительности, чтобы обеспечить минимальное расстояние между этими импульсами.

Квадрат расстояния между сигналами равен:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \int_0^{x_0} \left( s_0 \sin \frac{\pi x}{x_0} - A \right)^2 dx = \int_0^{x_0} \left\{ s_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} - 2As_0 \sin \frac{\pi x}{x_0} + A^2 \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} s_0^2 x_0 - \frac{4Ax_0}{\pi} s_0 + A^2 x_0, \\ \frac{d\rho^2}{dA} &= -\frac{4x_0}{\pi} s_0 + 2Ax_0 = 0, \\ A &= \frac{2s_0}{\pi} \approx 0.637s_0.\end{aligned}$$

При этом

$$\rho^2 = \frac{1}{2} s_0^2 x_0 - \frac{4x_0 s_0}{\pi} \frac{2s_0}{\pi} + \frac{4s_0^2}{\pi^2} x_0 = s_0^2 x_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \approx (0.31)^2 s_0^2 x_0.$$

Энергия синусоидального импульса

$$E_s = s_0^2 \int_0^{x_0} \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} dx = \frac{s_0^2 x_0}{2},$$

его норма

$$\|s\| = \frac{1}{\sqrt{2}} s_0 \sqrt{x_0} \approx 0.71s_0 \sqrt{x_0},$$

Отсюда  $\frac{\rho_{\min}}{\|s\|} \approx \frac{0.31}{0.71} \approx 0.4$ , т.е. минимальное расстояние между

импульсами  $\rho$  составляет 40% от нормы синусоидального импульса.

**Координатный базис.** Линейное пространство (по аналогии с обычным трехмерным пространством) может быть снабжено специальной структурой, играющей роль системы координат [2,4]. Совокупность векторов  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}$  принадлежащих  $M$ , является линейно независимым координатным базисом, если равенство

$\sum_i \alpha_i l_i = \Theta$  возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов  $\alpha_i$ .

Если дано разложение некоторого сигнала в виде  $s = \sum_i c_i l_i$ , то числа  $\{c_1, c_2, c_3, \dots\}$  являются проекциями сигнала  $s$  относительно выбранного базиса. Количество базисных векторов может быть неограниченно велико. Такие линейные пространства называются бесконечномерными.

**Пример 1.8** Если линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка  $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$ , то координатным базисом в этом пространстве служит система функций

$$\{l_0 = 1, l_1 = x, l_2 = x^2, \dots\}$$

В метрическом пространстве норма является аналогом длины вектора в векторном пространстве.

**Скалярное произведение сигналов.** Вычислим энергию суммы двух сигналов:

$$E_{\Sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} v^2 dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dx = E_u + E_v + E_{uv}.$$

Энергии сигналов не аддитивны – энергия сигнала содержит в себе взаимную энергию

$$E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} uv dx.$$

По аналогии с суммой векторов  $A$  и  $B$  в линейном векторном пространстве

$$|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2(AB)$$



и косинусом угла между этими векторами  $\cos(AB) = \frac{(AB)}{|A| \cdot |B|}$ ,

определим скалярное произведение сигналов  $u$  и  $v$ :

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} uv dx. \quad (1.14)$$

и косинус угла между сигналами  $\cos \psi_{uv} = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$ ;

Свойства скалярного произведения:

$$(u, v) \geq 0, \quad (u, v) = (v, u), \quad (\lambda u, v) = \lambda(u, v)$$

где  $\lambda$  – произвольное число;

$$(u, v, w) = (u, w) + (v, w). \quad (1.15)$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется вещественным гильбертовым пространством. В гильбертовом пространстве справедливо неравенство Коши-Буняковского  $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .

**Пример 1.9** Даны сигналы (рис.1.9):

$$s_1 = e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0,$$

$$s_2 = e^{\alpha(x-x_0)}, \quad x \geq x_0.$$

Определить угол между этими сигналами.

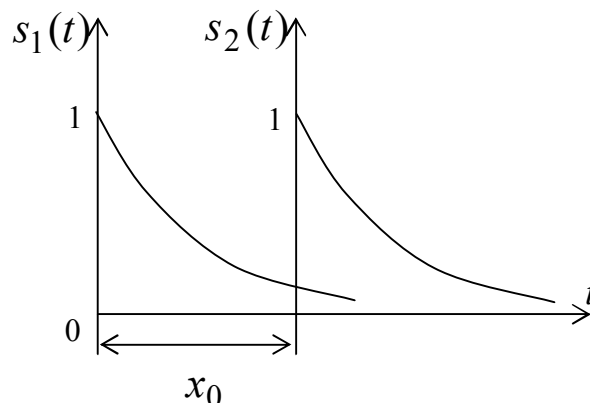


Рис. 1.9. Два смещенных во времени экспоненциальных импульса

$$E_{s1} = \|s_1\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha},$$

$$E_{s2} = \|s_2\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha(x-x_0)} dx = \frac{1}{2\alpha},$$

$$(s_1, s_2) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-\alpha(x-x_0)} dx = e^{\alpha x_0} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha x_0},$$

В соответствии с (1.14)  $\cos \psi_{s_1, s_2} = 2\alpha e^{\alpha x_0}$ .

**Ортогональные сигналы и обобщенные ряды Фурье.** Два сигнала  $u$  и  $v$  называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} uv^* dx = 0.$$

Пусть  $H$  – гильбертово пространство сигналов с ограниченным значением энергии. Эти сигналы определены в промежутке  $[x_1, x_2]$ , конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же интервале задана бесконечная система функций  $\{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ , попарно ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь  $\delta_{ij}$ - символ Кронекера. Это означает, что в пространстве сигналов задан ортонормированный базис.

Разложим произвольный сигнал в ряд

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i. \quad (1.16)$$

Это выражение является представлением сигнала обобщенным рядом Фурье в выбранном базисе.

**Пример 1.10.** Пусть  $u$  и  $v$  – сигналы в вещественном гильбертовом пространстве. Какими свойствами они должны

обладать, чтобы сигналы  $s_1 = u + v$  и  $s_2 = u - v$  были ортогональны?

Запишем скалярное произведение сигналов  $s_1$  и  $s_2$  :

$$(s_1, s_2) = (u + v, u - v) = (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (u, u) - (v, v).$$

Сигналы  $s_1$  и  $s_2$  ортогональны, если энергии сигналов  $u$  и  $v$  равны:

$$(u, u) - (v, v) = 0.$$

**Пример 1.11** Сохранится ли ортогональность сигналов  $s_1$  и  $s_2$  (см. пример 1.10) в комплексном гильбертовом пространстве?

Найдем скалярное произведение сигналов  $s_1$  и  $s_2$  :

$$(s_1, s_2) = (u + v, u - v) = (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (v, u) - (u, v).$$

Сигналы  $s_1$  и  $s_2$  ортогональны, если обменная энергия комплексных сигналов  $u$  и  $v$  вещественна:  $(v, u) - (v, u) = 0$ .

**Нахождение коэффициентов  $c_i$ .** Возьмем базисную функцию  $u_k$  с произвольным номером  $k$ , умножим на нее скалярно обе части равенства (1.16) и проинтегрируем на интервале  $[x_1, x_2]$ , в котором заданы эти сигналы:

$$(s, u_k) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i, u_k \right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (u_i, u_k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ik} = c_k.$$

Отсюда

$$c_k = (s, u_k).$$

Таким образом, обобщенный ряд Фурье позволяет представлять сигнал через счетное множество коэффициентов, которые определяют проекции вектора  $s(x)$  в гильбертовом пространстве на базисные направления. Например, ортонормированная система гармонических сигналов имеет вид [2]

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{\sqrt{T}}, \\
u_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi x}{T}, \\
u_2 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi x}{T}, \\
&\vdots \\
u_{2m-1} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mx}{T}, \\
u_{2m} &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

**Пример 1.12.** Пусть в гильбертовом пространстве сигналов задан ортонормированный базис  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Показать, что вектор  $w = \xi - \sum_{i=1}^N (\xi, u_i) u_i$  при произвольном  $\xi$  ортогонален любому вектору из ортонормированного базиса  $\{u_i\}$ .

Решение:

$$\begin{aligned}
(w, u_i) &= \left( \xi - \sum_{i=1}^N (\xi, u_i) u_i, u_k \right) = (\xi, u_k) - \sum_{i=1}^N (\xi, u_i) (u_i, u_k) = \\
&= (\xi, u_k) - \sum_{i=1}^N (\xi, u_i) \delta_{ik} = (\xi, u_k) - (\xi, u_k) = 0.
\end{aligned}$$

**Построение ортонормированной системы базисных функций.** Результаты, полученные в примере 1.12, могут служить основой для построения ортонормированного базиса из системы взаимно неортогональных функций  $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ , заданных в гильбертовом пространстве. Найдем норму вектора  $\xi_0$  и образуем новый вектор  $u_0 = \xi_0 / \|\xi_0\|$ . Как показано в примере 1.12, вектор  $w_1 = \xi_1 - (\xi_1, u_0) u_0$  ортогонален  $u_0$ .

Сформируем аналогичным способом новый вектор  $w_2 = \xi_2 - (\xi_2, u_1)u_1$ . Таким образом, продолжая этот процесс, для  $n$ -го вектора ортогонального базиса получаем

$$\begin{aligned} w_n &= \xi_n - (\xi_n, u_0)u_0 - (\xi_n, u_1)u_1 - \dots - (\xi_n, u_{n-1})u_{n-1} = \\ &= \xi_n - \sum_{i=0}^n (\xi_n, u_i)u_i = \sum_{i=0}^n c_{ni}\xi_i, \end{aligned}$$

где  $c_{ni}$  - постоянные коэффициенты. Этот метод получения ортогонального базиса  $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$  называют процедурой Грама-Шмидта.

**Энергия сигнала, представленного в виде обобщенного ряда Фурье.** Пусть некоторый сигнал  $s(x)$  разложен в ряд по ортонормированному базису:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

Энергия сигнала выражается формулой

$$E_s = (s, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_i c_k (u_i, u_k) = \sum_{ik} c_i c_k \delta_{ik} = \sum_i c_i^2.$$

Таким образом, энергия сигнала равна сумме энергий всех компонент обобщенного ряда Фурье.

**Оптимальность разложения по ортогональному базису.** Представим сигнал  $s(x)$ , заданный на интервале  $[x_1, x_2]$

конечномерной аппроксимацией  $\tilde{s}(x) = \sum_{i=1}^N c_i u_i$  на

ортонормированном базисе. Определим коэффициенты  $c_i$  из условия минимальной ошибки аппроксимации:

$$\begin{aligned} \mu &= \|s - \tilde{s}\|^2 = (s - \tilde{s}, s - \tilde{s}) = (s, s) + (s, \tilde{s}) - 2(s, \tilde{s}) = \\ &= E_s + \sum_{i=1}^N c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N c_i (s, u_i). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что базисные функции  $u_m$  ортонормированы,

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}.$$

Условие экстремума  $\partial\mu/\partial c_m = 0$  для  $m = 1, 2, \dots, N$ :

$$\frac{\partial\mu}{\partial c_m} = \frac{\partial}{\partial c_m} \left\{ E_s + \sum_{i=1}^N c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N c_i(s, u_i) \right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial\mu}{\partial c_m} = \frac{\partial}{\partial c_m} \{ c_m^2 - 2c_m(s, u_m) \} = 2c_m - 2(s, u_m) = 0.$$

Для  $c_m$  получаем

$$c_m = (s, u_m),$$

что совпадает с формулой для определения коэффициента разложения в обобщенный ряд Фурье.

Вторая производная

$$\frac{\partial^2}{\partial c_m^2} [c_m^2 - 2c_m(s, u_m)] \geq 0.$$

Следовательно, это условие минимума ошибки аппроксимации. Поскольку разложение сигнала в обобщенный ряд Фурье обеспечивает минимальную ошибку аппроксимации, оно оптимально.

**1.4. Представление сигналов в комплексной форме. Преобразование Гильберта.** При описании сигналов в ряде случаев удобно использовать понятие *комплексного сигнала*, который соответствует действительному сигналу  $s(t)$  и определяется выражением:

$$z(t) = s(t) + is_c(t). \quad (1.18)$$

Здесь  $s_c(t)$  – сигнал, связанный с исходным сигналом  $s(t)$  с помощью преобразования Гильберта [3]:

$$s_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(x)}{t-x} dx. \quad (1.19)$$

При этом  $s_c(t)$  называют сигналом, *сопряженным* по Гильберту с сигналом  $s(t)$ . Обратное преобразование Гильберта:

$$s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_c(x)}{t-x} dx. \quad (1.20)$$

Согласно выражению (1.20) преобразование Гильберта сопряженного сигнала даст исходный сигнал со знаком минус.

Комплексный сигнал, определяемый выражениями (1.18) и (1.19), называют *аналитическим сигналом*. Иными словами, аналитический сигнал – это соответствующий данному физическому сигналу  $s(t)$  комплексный сигнал  $\dot{z}(t)$ , действительная часть которого равна самому физическому сигналу, а мнимая – сопряжена с ним по Гильберту.

**Пример 1.12.** Математическая модель сигнала имеет вид (рис. 1.9)  $s(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} = \text{sinc}(\omega_0 t)$  где  $\text{sinc}(0)=1$ ;  $\text{sinc}(n, \pi)$ ;  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

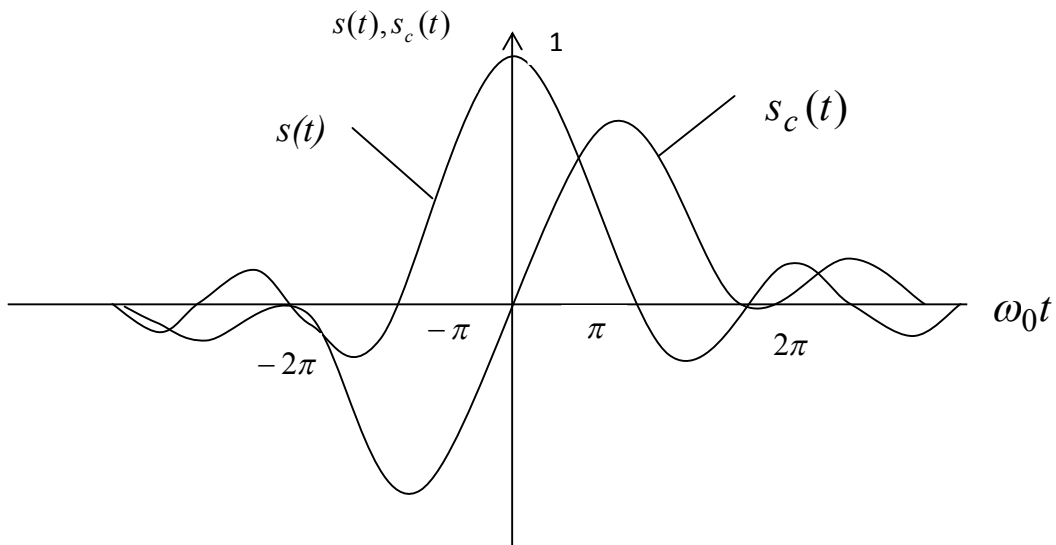


Рис. 1.10. Исходный и сопряженный сигналы

Представим этот сигнал в комплексной форме. В соответствии с формулой (1.19)

$$s_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 x}{\omega_0 x(t-x)} dx = -\frac{1}{\pi \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 x}{x^2 - tx} dx.$$

По таблицу интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 x}{x^2 - tx} dx = \pi \frac{\cos \omega_0 t - 1}{t}.$$

Следовательно, сопряженный сигнал:

$$s_c(t) = \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0 t} = -\frac{\sin^2(\omega_0 t / 2)}{\omega_0 t / 2}.$$

Комплексная форма представления заданного сигнала:

$$\dot{z}(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} - i \frac{\sin^2(\omega_0 t / 2)}{\omega_0 t / 2}.$$

Графики  $s(t)$  и  $s_c(t)$  приведены на рис. 1.10. Отметим, что сигналы  $s(t)$  и  $s_c(t)$  ортогональны.

Приведем некоторые полезные для практического использования соотношения. Непосредственное вычисление по формуле (1.17) показывает, что

$$\text{для } s(t) = \cos \omega t, \quad s_c(t) = \sin \omega t; \quad (1.21)$$

$$\text{для } s(t) = \sin \omega t, \quad s_c(t) = -\cos \omega t.$$

Следовательно, чтобы получить преобразование Гильберта гармонического сигнала, необходимо сместить этот сигнал на четверть периода в сторону запаздывания.

Если исходный сигнал состоит из суммы гармоник:

$$s(t) = \sum_n (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad (1.22)$$

сопряженный сигнал имеет вид

$$s_c(t) = \sum_n (a_n \sin \omega_n t - b_n \cos \omega_n t). \quad (1.23)$$

Если исходный сигнал представлен интегралом вида

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (1.24)$$

сопряженный сигнал имеет вид

$$s_c(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(\omega) \sin \omega t - b(\omega) \cos \omega t] d\omega. \quad (1.25)$$

Отметим, что аналитический сигнал является обобщенным комплексного представления гармонического сигнала:

$$z(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

на случай любого сигнала. Такое представление позволяет



использовать преимущества методов теории функций комплексной переменной.

Комплексный сигнал (1.18) может быть также представлен в показательной форме:

$$\dot{z}(t) = U(t)e^{i\Phi(t)}, \quad (1.26)$$

или тригонометрической форме:

$$z(t) = U(t) \cos \Phi(t) + iU(t) \sin \Phi(t), \quad (1.27)$$

где

$$U(t) = |z(t)| = \sqrt{s^2(t) + s_c^2(t)}, \quad (1.28)$$

$$\Phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{s_c(t)}{s(t)}. \quad (1.29)$$

Функцию  $U(t)$  называют *огнбающей*, а функцию  $\Phi(t)$  – *полной фазой* сигнала  $s(t)$ .

**1.5. Контурный и каркасный способы описания сигналов в виде колоколообразных импульсов (пиков) [5,6,7].** Под колообразным импульсом (пиком) понимается некоторая однозначно заданная функция:  $y = f(x)$ , имеющая один экстремум (вершина пика) и 2 точки перегиба (ветви пика). Пик имеет начало и/или конец, то есть область определения ограничена теми значениями  $x$ , при которых  $f(x)=0$ . Пик не имеет отрицательных областей на оси ординат.

Для пика можно выделить три общих параметра: два - количественных (высота, ширина); один - качественный (положение максимума пика). Все эти три параметра размерные.  $y_m$  - высота пика,  $x_m$  - положение пика по оси абсцисс. Ширина  $w = w_+ + w_-$ . Если пик выражать через безразмерную функцию пика  $p = \operatorname{peak}(p)$ , то переход к размерным координатам будет осуществляться с помощью этих трех общих параметров пика:

$$y = y_m \operatorname{peak} \left( \frac{x - x_m}{w} \right),$$

где  $q = \frac{y}{y_m}$  ;  $p = \frac{x - x_m}{w}$  - безразмерная ордината и абсцисса;  $y_a x$  - размерная ордината и абсцисса. Высота и ширина безразмерного пика равны 1, а положение максимума пика – 0.

### Контурный способ характеристики свойств пиков.

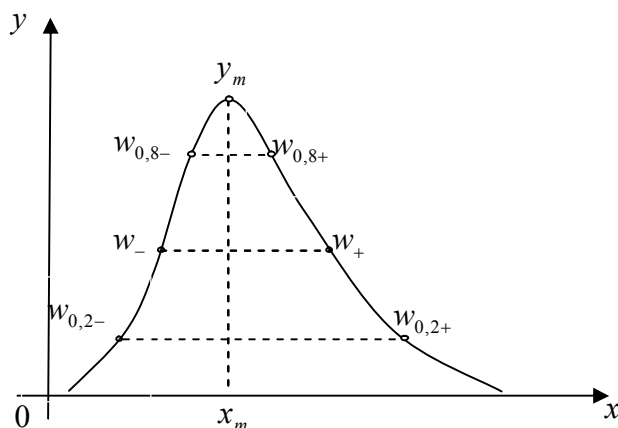


Рис. 1.11. Основные характеристические точки на контуре размерного пика.

Рассмотренные параметры не характеризуют форму пика, а характеризуют его размер по осям ординат ( $y_m$ ) и абсцисс ( $w$ ) и сдвиг относительно оси абсцисс ( $x_m$ ). Для характеристики свойств формы пика вводятся еще пять взаимонезависимых параметров. Все параметры формы – безразмерные величины. Для вычисления этих параметров используются значения  $w_{q\pm}$  ширины пика под правой и левой ветвями на некотором уровне  $q$  (см. табл. 1.1).

Значения параметров несимметричности, островершинности хвостатости для контурного способа

Таблица 1.1

Параметры		Формула	Выражение взаимосвязи	Диапазон	
				от	до
Несимметричность	$S'$	$\frac{w_+}{w}$	$\frac{S+1}{2}$	0	1
	$S$	$\frac{w_+ + w_-}{w}$	$2S'-1$	-1	1
Островершинность общая (средняя)	$\nu$	$\frac{\nu_+ + \nu_-}{2}$	-	0	1
Островершинность для отдельных ветвей	$\nu_{\pm}$	$1 - \frac{w_{0,8\pm}}{w_{\pm}}$	$\nu(1 \pm S_{\nu})$	0	1
Несимметричность формы вершины пика	$S_{\nu}$	$\frac{\nu_+ + \nu_-}{\nu_- + \nu_+}$	-	-1	1
Хвостатость общая (средняя)	$t$	$\frac{t_+ + t_-}{2}$	-	0	1
Хвостатость для отдельных ветвей	$t_{\pm}$	$1 - \frac{w_{\pm}}{w_{0,2\pm}}$	$t(1 \pm S_t)$	0	1
Несимметричность формы основания пика	$S_t$	$\frac{t_+ + t_-}{t_- + t_+}$	-	-1	1

$S$  – отношение разности ширин полупика под правой и левой ветвями к ширине полупика.

При  $S = 0$  - пик симметричен.

При  $S = -1$ ,  $S = 1$  – пик несимметричен с вырожденной ветвью (правой, левой).

При  $S' = 0,5$  - пик симметричный.

При  $S' = 0$  и  $S' = 1$  пик несимметричный с вырожденной ветвью

(правой, левой).

Острровершинность и хвостатость характеризуют как свойства общие для всего пика ( $v$  и  $t$ ), так и свойства отдельных ветвей ( $v_+$  и  $v_-$ ,  $t_+$  и  $t_-$ ). В случае несовпадения этих параметров для отдельных ветвей можно сказать, что пик является несимметричным по форме в области вершины или основания.

Для количественной характеристики несимметричности формы пика используются два параметра  $S_v$  и  $S_t$ .

При этом, однозначно характеризовать форму вершины или хвоста всего пика можно двумя способами:

через параметры  $v_+$  и  $v_-$  или  $t_+$  и  $t_-$ ;

через параметры  $v$  и  $S_v$  или  $t$  и  $S_t$ .

Всего имеем набор из пяти взаимонезависимых параметров формы плюс три общих параметра: высота, ширина, положение). Например:  $S$ ,  $v$ ,  $S_v$ ,  $t$ ,  $S_t$ . Уровни 0,8 и 0,2 являются базовыми.

### **Каркасный способ характеристики свойств пиков**

В каркасном способе представления все параметры связаны с каркасом, образованными касательными в точках перегиба ветвей пика (см. рис. 1.12.).

В качестве основных параметров размера пика выступают высота каркаса ( $\hat{A}$ ) - это масштаб по оси ординат и ширина основания каркаса ( $\hat{w}$ ) - это масштаб по оси абсцисс. Параметром положения пика ( $\hat{x}$ ) является абсцисса пересечения касательных.

Если пик выразить через безразмерную функцию пика  $q = peak(p)$ , то переход к размерным координатам будет осуществляться по формуле

$$y = f(x) = \hat{A} peak\left(\frac{x - \hat{x}}{\hat{w}}\right),$$

где  $q = \frac{y}{y_m}$ ;  $p = \frac{x - \hat{x}}{\hat{w}}$  - безразмерные ордината и абсцисса,  $y$  и  $x$  - размерные ордината и абсцисса. Высота безразмерного пика не будет

равна 1, а будет  $q_m$ . Положение максимума пика -  $p_m$ .

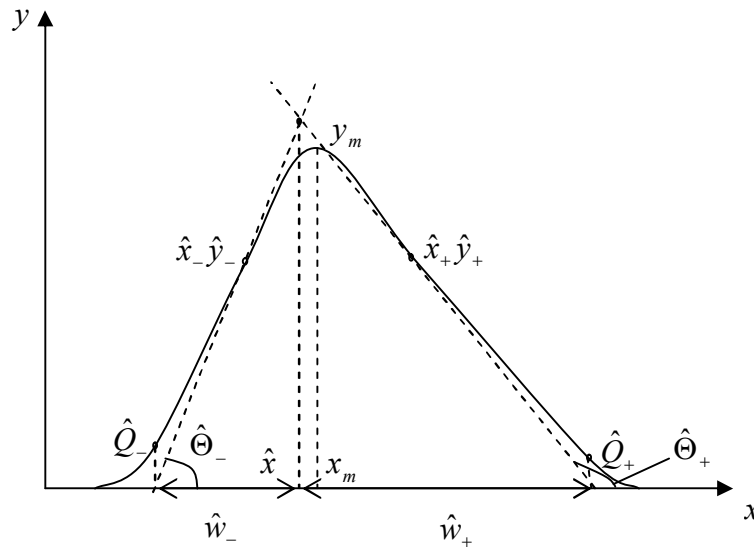


Рис.1.12. Основные параметры каркасного способа представления сигнала

Уравнение касательной к точке перегиба на ветви пика в размерных координатах имеет вид:

$$y = \hat{A}_{\pm} + \hat{B}_{\pm} x.$$

Тогда уравнение касательной к точке перегиба на ветви пика в размерных координатах примет вид:

$$q = 1 + \hat{B}_{\pm} p.$$

При вычислении параметров каркаса сигнала необходимо определить координаты точек перегиба ( $\hat{x}_{\pm}$  и  $\hat{y}_{\pm}$ ).

$\hat{x}_{\pm}$  - определяется как значение абсциссы при равенстве нулю второй производной  $f''(\hat{x}_{\pm}) = 0$ . Затем определяются значения точек перегиба  $\hat{y}_{\pm}$  ( $\hat{y}_{\pm} = f(\hat{x}_{\pm})$ ).

$\hat{B}_{\pm}$  - коэффициент наклона в уравнении касательной к точке перегиба ветви пика (значение первой производной  $\hat{B}_{\pm} = f'(\hat{x}_{\pm})$ ).

Общие формулы для расчета параметров каркаса пика исходя из значений размерных параметров  $\hat{x}_{\pm}, \hat{y}_{\pm}, \hat{B}_{\pm}$  представлены в таблице 1.2.

Расчетные формулы для основных параметров треугольного  
каркаса несимметричного пика

Таблица 1.2

Параметр	$\hat{A}_{\pm}$	$\hat{x}$	$\hat{A}$	$\hat{W}$
Формула	$\hat{y}_{\pm} - \hat{B}_{\pm}\hat{x}_{\pm}$	$\frac{\hat{A}_{-} - \hat{A}_{+}}{\hat{B}_{+} - \hat{B}_{-}}$	$\hat{A}_{\pm} + \hat{B}_{\pm}\hat{x}$	$\pm \left( \hat{x}_{\pm} - \frac{\hat{y}_{\pm}}{\hat{B}_{\pm}} - \hat{x} \right)$
Параметр	$\hat{w}$	$q_m$	$p_m$	$\hat{Q}_{\pm}$
Формула	$\hat{w}_{+} + \hat{w}_{-}$	$\frac{y_m}{\hat{A}}$	$\frac{x_m - \hat{x}}{\hat{w}}$	$f(\hat{x} + \hat{w}_{\pm}) =$ $\hat{A}_{peak} \left( \pm \frac{\hat{w}_{\pm}}{\hat{w}} \right)$

$\hat{A}$  - высота каркаса (значение ординаты пересечения касательных к точкам перегиба ветвей пика);  $\hat{w}$  - ширина основания каркаса.

$\hat{Q}_{\pm}$  - значение ординаты контура пика при абсциссе пересечения касательной к точке перегиба ветви пика с осью абсцисс ( $\hat{x} \pm \hat{w}_{\pm}$ ).

$q_m$  - безразмерная ордината точки максимума пика.

$p_m$  - безразмерная абсцисса точки максимума пика.

$(x_m, y_m)$  - координаты точки максимума пика в размерных координатах.

В рамках каркасного способа можно достаточно детально количественно охарактеризовать форму пика. Для этого вводятся пять взаимонезависимых параметров: параметры несимметричности ( $\hat{S}$  или  $\hat{S}'$ ), островершинности ( $\hat{v}$  или  $\hat{S}_v$ ) и хвостатости ( $\hat{t}_{+}$  и  $\hat{t}_{-}$  или  $\hat{t}$  и  $\hat{S}_t$ ). Все параметры формы – безразмерные величины. Связь с параметрами каркаса приведена ниже в таблице 1.3.

Значения параметров несимметричности, островершинности и хвостатости для каркасного способа

Таблица 1.3

Параметры		Формула	Выражение взаимосвязи	Диапазон	
				от	До
Несимметричность	$\hat{S}$	$\frac{\hat{w}_+ + \hat{w}_-}{\hat{w}}$	$2S'-1$	0	1
	$\hat{S}'$	$\frac{\hat{w}_+}{\hat{w}}$	$\frac{S+1}{2}$	-1	1
Островершинность (общая)	$\hat{v}$	$\frac{y_m}{\hat{A}}$	$q_m$	0	1
Несимметричность формы вершины пика	$\hat{S}_v$	$\frac{x_m - \hat{x}}{\hat{w}(1-\hat{v})}$	$\frac{p_m}{1-\hat{v}}$	-1	1
Хвостатость для отдельных ветвей	$\hat{t}_{\pm}$	$\frac{\hat{Q}_{\pm}}{\hat{A}}$	$\hat{t}(1 \pm \hat{S}_t)$	0	1
Хвостатость (средняя)	$\hat{t}$	$\frac{\hat{t}_+ + \hat{t}_-}{2}$	–	0	1
Несимметричность формы основания пика	$\hat{S}_t$	$\frac{\hat{t}_+ + \hat{t}_-}{\hat{t}_- + \hat{t}_+}$	–	-1	1

Рекомендуется использовать следующий набор параметров формы:  $\hat{S}, \hat{v}, \hat{S}_v, \hat{t}, \hat{S}_t$ .

## Контрольные вопросы

1. Каковы разновидности измерительных сигналов?
2. Приведите примеры формирования многомерного сигнала.
3. Какими параметрами описываются импульсные сигналы?
4. Чем отличается радиоимпульс от видеоимпульса?
5. Назовите основные характеристики детерминированных сигналов.
6. Как математически описываются периодические сигналы?
7. Приведите примеры непериодических сигналов.
8. Дайте определения энергии и мощности сигналов.
9. Чему равны энергия и мощность суммы сигналов?
10. Что такое взаимная энергия двух сигналов?
11. Какие сигналы называются ортогональными?
12. Как ортогональность сигналов связана с интервалом их определения?
13. Какими свойствами характеризуется линейное пространство сигналов?
14. Как связаны норма и энергия сигнала?
15. Что такое метрическое пространство сигналов?
16. Как определяется скалярное произведение сигналов?
17. Какими свойствами обладает гильбертово пространство сигналов?
18. Что такое ортогональный координатный базис?
19. Как определяются коэффициенты разложения сигнала в обобщенный ряд Фурье?
20. В чем заключается процедура Грама-Шмидта?
21. Как осуществляется прямое и обратное преобразование Гильберта?
22. Как осуществляется представление сигналов в комплексной форме?
23. В чем заключается сущность контурного представления сигналов в виде колоколообразных импульсов?
24. В чем заключается сущность каркасного способа представления сигналов в виде колоколообразных импульсов?



## 2. Корреляционный анализ детерминированных сигналов

*Корреляционный анализ* — это анализ сигналов во временной области с целью выявления и оценки их подобия (сходства), основанный на изучении корреляционной функции (КФ). Для детерминированных сигналов *корреляция* — понятие, которым отмечают связь между сигналами [3]. *Корреляционная функция* дает количественную оценку степени этой связи. Ее используют при решении задач обнаружения и выделения сигналов, когда возникает необходимость сравнения формы двух сигналов или сравнения принятого сигнала с некоторым эталонным сигналом.

### 2.1. Корреляционная функция непериодического сигнала

Корреляционную (автокорреляционную) функцию действительного сигнала  $s(t)$  с конечной энергией определяют по формуле:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt. \quad (2.1)$$

При этом  $B(\tau)$  выражается в единицах энергии. Корреляционная функция  $B(\tau)$  характеризует меру сходства сигнала  $s(t)$  с его копией  $s(t \pm \tau)$ , смещенной на интервал  $\pm \tau$ . Переменная  $\tau$  играет роль параметра.  $B(\tau)$  — это функция сдвига  $\tau$  между сигналом и его смещенной копией.

Корреляционная функция обладает следующими свойствами [1]:

1. Значение КФ при  $\tau = 0$  равно энергии сигнала:

$$B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E. \quad (2.2)$$

2. КФ является четной функцией:

$$B(-\tau) = B(\tau).$$

3. КФ имеет максимум при значении  $\tau = 0$ :

$$B(0) \geq B(\tau).$$

**Пример 2.1. КФ прямоугольного импульса.** На рис.2.1 изображен прямоугольный импульс  $s(t)$  и его сдвинутая копия  $s(t - \tau)$  при положительных значениях  $\tau$ .

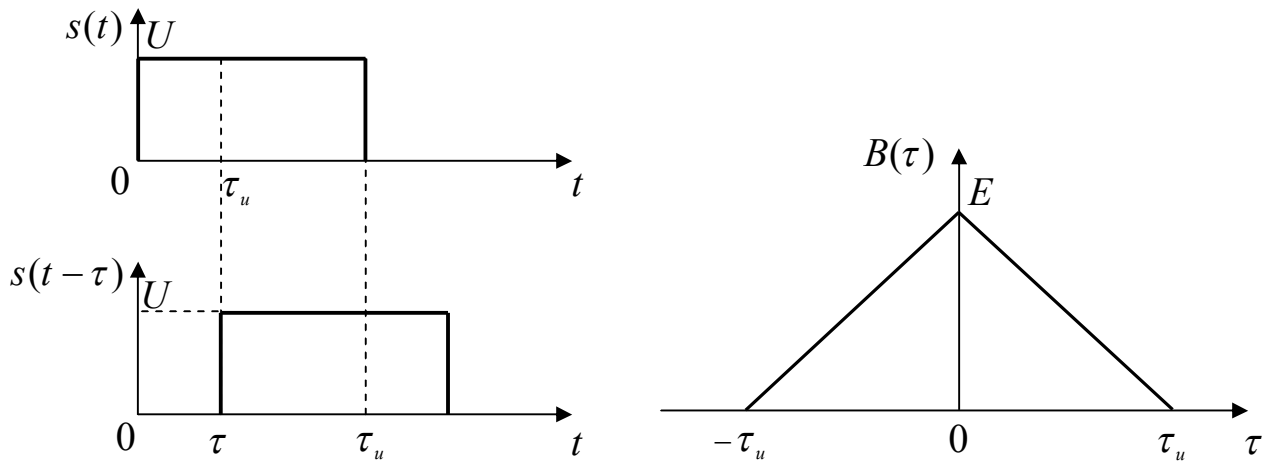


Рис. 2.1 Нахождение корреляционной функции прямоугольного импульса

Произведение  $s(t)s(t - \tau)$  отлично от нуля только на интервале времени  $\tau \leq t \leq \tau_u$ . По формуле 2.1 находим

$$B(\tau) = U^2 \int_{\tau}^{\tau_u} dt = U^2 (\tau_u - \tau).$$

Полученное выражение определяет КФ при значении  $\tau \geq 0$ . Учитывая четность КФ, можно записать ее в виде

$$B(\tau) = \begin{cases} U^2 (\tau_u - |\tau|), & |\tau| \leq \tau_u, \\ 0, & |\tau| > \tau_u. \end{cases} \quad (2.3)$$

График  $B(\tau)$  приведен на рис.2.1. КФ имеет вид треугольника, основание которого равно удвоенной длительности импульса, а высота — энергии импульса:  $B(0) = U^2 \tau_u = E$ . Величину  $\tau_k = 2\tau_u$  называют *интервалом корреляции*.

**Пример 2.2. КФ двух прямоугольных импульсов.** На рис. 2.2, а изображены два прямоугольных импульса.

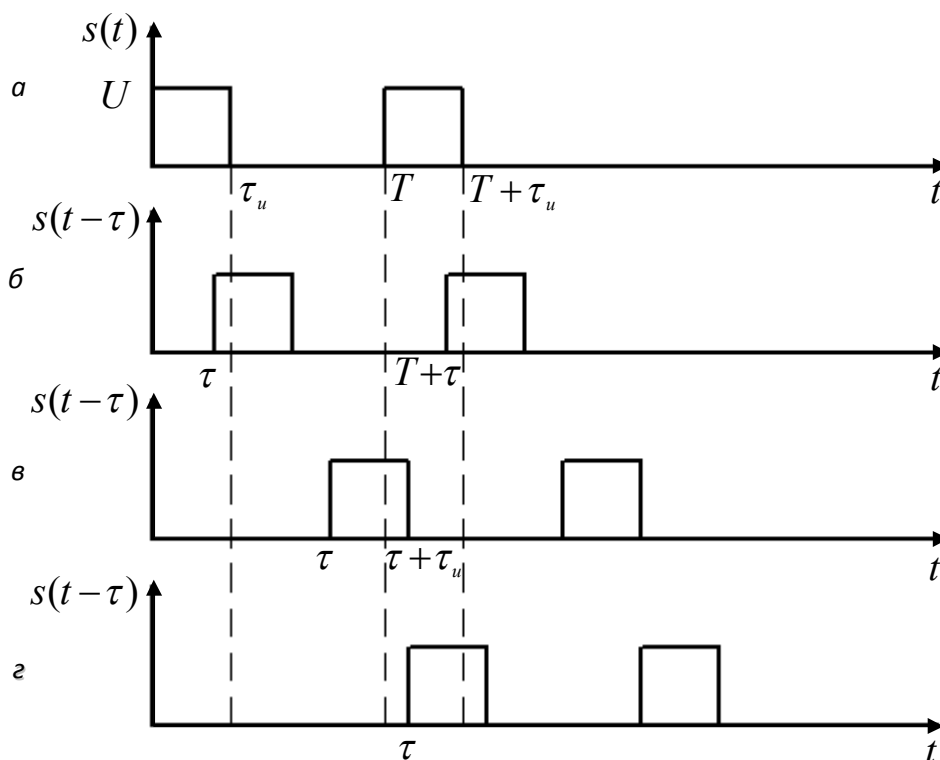


Рис.2.2. Два прямоугольных импульса (а) и их сдвинутые копии (б, в, г)

Применим формулу 2.1 при значении  $\tau > 0$ :

$$B(\tau) = \int_{\tau}^{T+\tau} s(t)s(t-\tau)dt.$$

При сдвиге  $0 \leq \tau \leq \tau_u$  (рис.2.2, б)

$$B(\tau) = U^2 \int_{\tau}^{\tau_u} dt + U^2 \int_{T+\tau}^{T+\tau_u} dt = 2U^2(\tau_u - \tau);$$

При сдвиге  $\tau_u \leq \tau \leq T$  (см. рис.2.2, в)

$$B(\tau) = U^2 \int_T^{\tau+\tau_u} dt = U^2(\tau_u - T + \tau);$$

При сдвиге  $T \leq \tau \leq T + \tau_u$  (см. рис.2.2, г)

$$B(\tau) = U^2 \int_{\tau}^{T+\tau_u} dt = U^2 (\tau_u + T - \tau).$$

На основании полученных результатов построен график  $B(\tau)$ , приведенный на рис.2.3, где  $E$  — энергия одного импульса. При построении графика учитывалась симметрия КФ относительно  $\tau = 0$ .

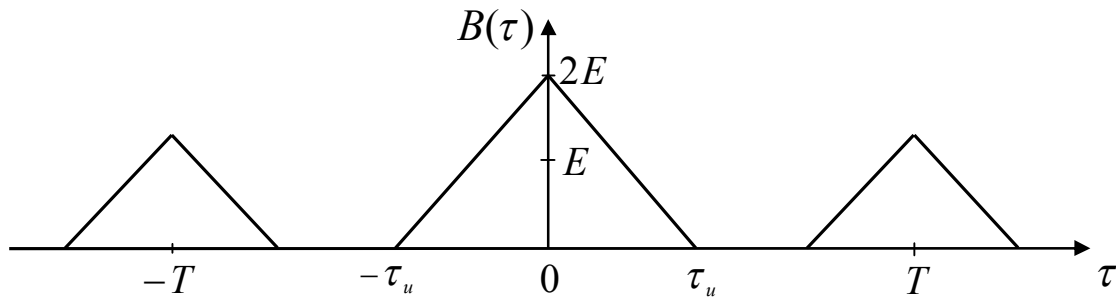


Рис.2.3. Корреляционная функция двух прямоугольных импульсов

Запишем дискретную функцию автокорреляции в виде:

$$B(m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j s_{j-m}. \quad (2.4)$$

Эта функция целочисленного аргумента  $m$ , переносящая на дискретный случай основные идеи скалярного произведения двух сигналов. Здесь  $s_j$  — дискретные отсчеты сигнала. Дискретная функция автокорреляции четна:

$$B(m) = B(-m).$$

При нулевом сдвиге функция автокорреляции превращается в энергию дискретного сигнала:

$$B(0) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j^2 = E.$$

**Пример 2.3. Сигналы Баркера.** Эти системы примечательны тем, что их корреляционные функции имеют высокий главный максимум при  $\tau = 0$  и низкий уровень при  $\tau \neq 0$ .

## Коды Баркера

N	Код Баркера												
3	1	1	-1										
4	1	1	1	-1									
4	1	1	-1	1									
5	1	1	1	-1	1								
7	1	1	1	-1	-1	1	-1						
11	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1		
13	1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1

Для иллюстрации на рис.2.4 изображены сигналы Баркера при  $N = 5$  и  $N = 11$ .

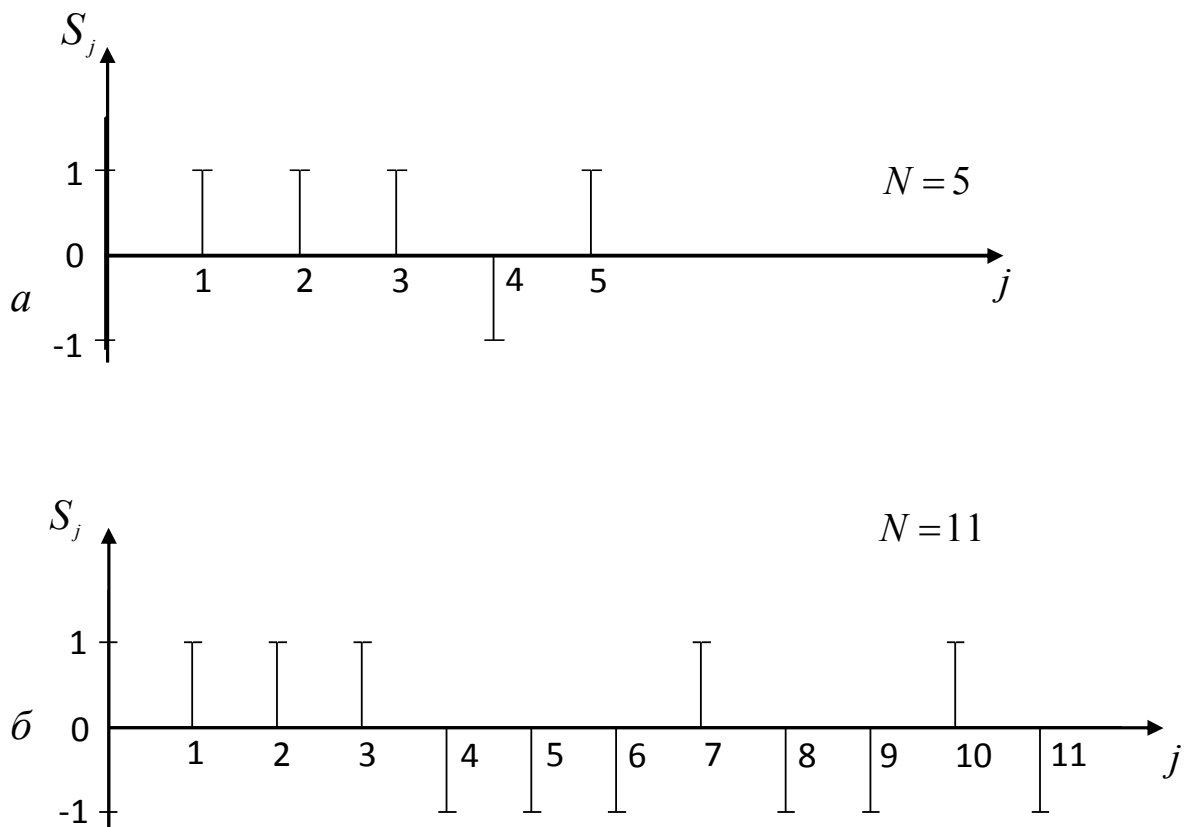


Рис.2.4. Сигналы Баркера:  $a$  соответствует  $N = 5$ ;  $б$  –  $N = 11$ .

Для вычисления корреляционной функции сигнала Баркера воспользуемся формулой (2.4), следовательно:

$$B(m) = \begin{cases} N, & m = 0; \\ \pm 1 \text{ или } 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

При этом  $m=0, 1, 2, \dots, N$ .

На рис.2.5 изображены КФ двух сигналов Баркера (при  $N=5, N=11$ ).

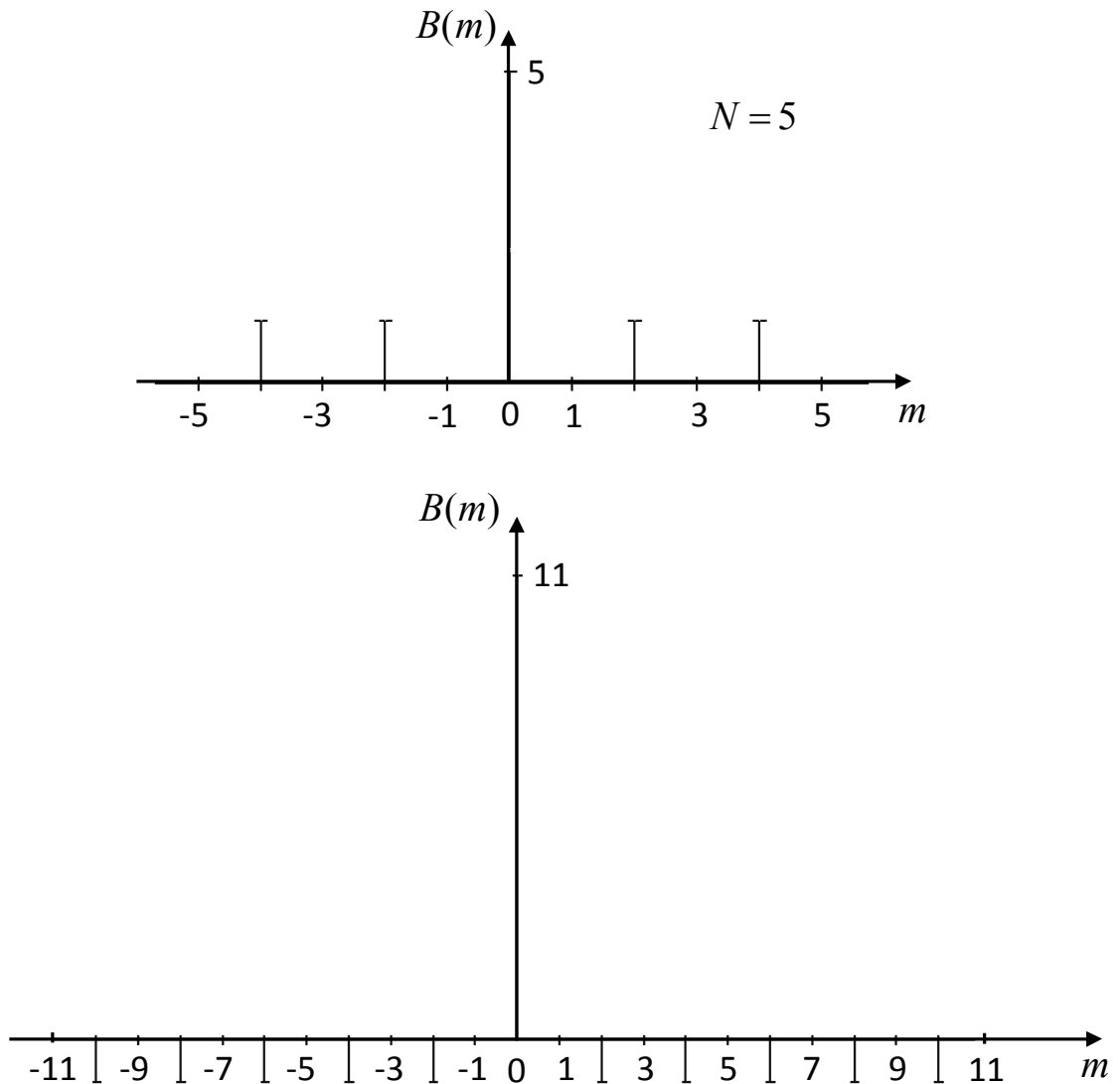


Рис.2.5. Корреляционные функции сигналов Баркера при двух значениях

$N: N=5, N=11$ .

## 2.2. Корреляционная функция периодического сигнала

Корреляционную (автокорреляционную) функцию периодиче-

ского сигнала  $s(t)$  с периодом  $T$  определяют следующим образом:

$$B(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t+\tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (2.5)$$

При этом  $B(\tau)$  выражается в единицах мощности.

Корреляционная функция периодического сигнала является периодической и четной функцией  $\tau$ ; имеет максимумы при  $\tau = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$ , равные средней мощности сигнала:

$$B(0) = B(nT) = P, \quad n = 1, 2, \dots$$

**Пример 2.4. КФ гармонического сигнала.** Для гармонического сигнала  $s(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$  корреляционная функция

$$B(\tau) = \frac{U^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t + \varphi) \cos[\omega(t - \tau) + \varphi] dt = \frac{U^2}{2} \cos \omega \tau.$$

Следовательно, КФ гармонического сигнала не зависит от его начальной фазы.

**Пример 2.5. КФ периодической последовательности прямоугольных импульсов.**

Для периодической последовательности прямоугольных импульсов с периодом  $T$  (рис.2.6, а) корреляционная функция также является периодической с тем же периодом (см. рис.2.6, б). Значение

$$B(0) = \frac{U^2 \tau_u}{T} = P,$$

т.е. равно средней мощности периодической последовательности прямоугольных импульсов.

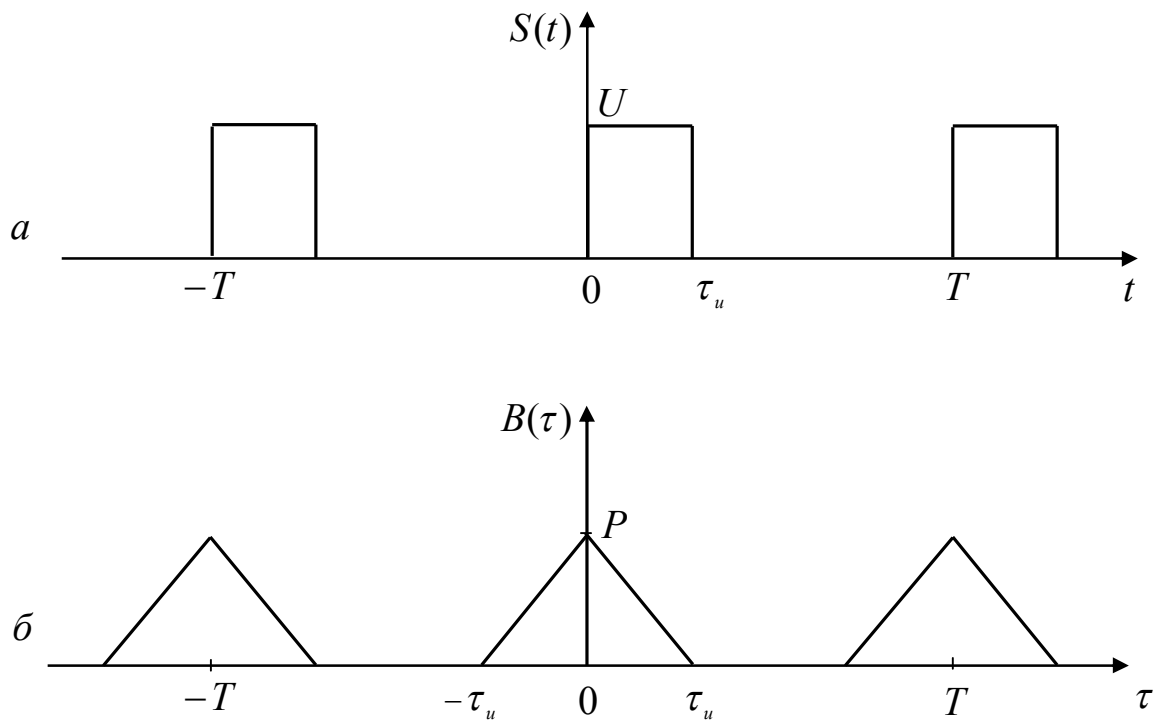


Рис.2.6. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а) и ее корреляционная функция (б).

### 2.3. Взаимно корреляционная функция двух сигналов

Для оценки степени связи между двумя различными сигналами используют взаимно корреляционную функцию (ВКФ) [1,3]. ВКФ действительных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  с конечной энергией определяют выражением

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt. \quad (2.6)$$

Значение  $B_{12}(\tau)$  не меняется, если вместо задержки сигнала  $s_2(t)$  рассматривать опережение сигнала  $s_1(t)$ . Поэтому выражение (2.6) можно обобщить следующим образом:



$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1(t+\tau)dt.$$

Имеет место также соотношение

$$B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau).$$

В отличие от КФ функция  $B_{12}(\tau)$  в общем случае не является четной и может достигать максимума при любом  $\tau$ .

Значение ВКФ при  $\tau = 0$  равно взаимной энергии двух сигналов:

$$B_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = E_{12}.$$

Рассмотрим пример вычисления ВКФ.

**Пример 2.6.** Пусть  $s_1(t)$  — треугольный импульс (см. рис.2.7, а).  $s_2(t)$  — прямоугольный импульс (б). На интервале  $0 \leq t \leq \tau_u$  они описываются функциями:

$$s_1(t) = \frac{Ut}{\tau_u}, \quad s_2(t) = U.$$

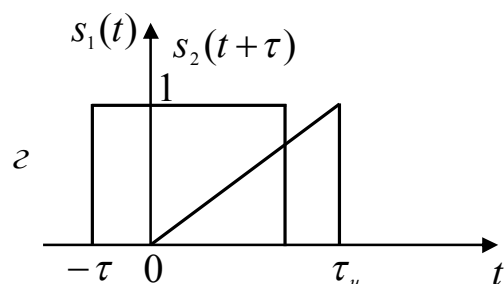
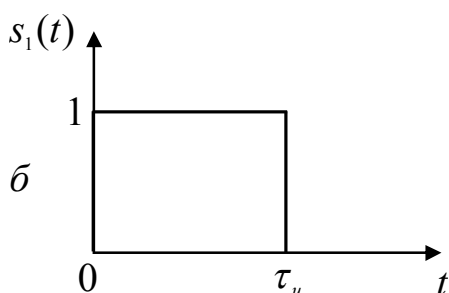
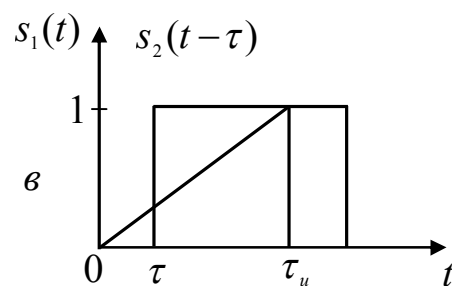
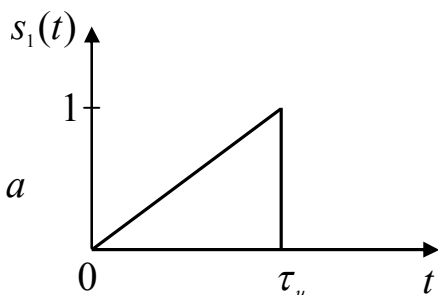


Рис.2.7. Прямоугольный (а) и треугольный (б) импульсы, их наложение при сдвиге прямоугольного импульса (в, г)

По формуле (2.6) находим ВКФ этих импульсов:

При сдвиге прямоугольного импульса вправо по оси времени (рис.2.7, в) получим:

$$B_{12}(\tau) = \frac{U^2}{\tau_u} \int_{\tau}^{\tau_u} t dt = \frac{U^2}{2\tau_u} (\tau_u^2 - \tau^2).$$

При сдвиге прямоугольного импульса влево ( $\tau < 0$ , рис.2., г) имеем

$$B_{12}(\tau) = \frac{U^2}{\tau_u} \int_0^{\tau_u - \tau} t dt = \frac{U^2}{2\tau_u} (\tau_u - \tau)^2.$$

Значение  $B_{12}(0)$  равно взаимной энергии прямоугольного и треугольного импульсов:

$$B_{12}(0) = \frac{U^2 \tau_u^2}{2} = E_{12}.$$

Изменяя порядок следования функций  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , можно убедиться, что  $B_{12}(\tau) = B_{21}(-\tau)$ . Графики  $B_{12}(\tau)$  и  $B_{21}(\tau)$  приведены на рис.2.8.

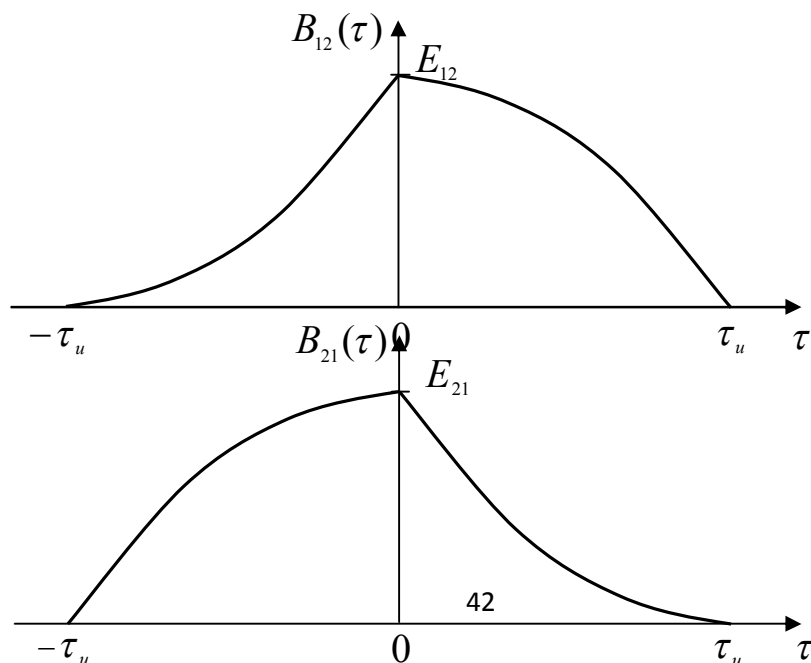


Рис.2.8. Взаимно корреляционные функции треугольного и прямоугольного импульсов

Таким образом, взаимно корреляционная функция — это не-симметричная функция, ее поведение при значениях  $\tau > 0$  и  $\tau < 0$  различно.

**Обобщение на случай дискретных сигналов.**

Пусть сигналы  $s(t)$  и  $v(t)$  заданы в дискретной форме как совокупности отсчетов

$$s = \{\dots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots\},$$

$$v = \{\dots, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\},$$

следующих во времени с одинаковыми интервалами дискретизации  $\Delta$ . Определим взаимную функцию корреляции двух дискретных сигналов по формуле

$$B_{sv}(m) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_j v_{j-m}, \quad (2.7)$$

где  $m$  — целое число, положительное, отрицательное или нуль.

**Пример 2.7.** Пусть сигналы  $s$  и  $v$  соответствуют двум четырехпозиционным сигналам Баркера:

$$s = \{1, 1, 1, -1\},$$

$$v = \{1, 1, -1, 1\}.$$

Если  $m > 0$ , то сигнал  $v$  запаздывает относительно сигнала  $s$ . Вычисляя по формуле (2.7), получаем  $B_{sv}(0) = 0$ ,  $B_{sv}(1) = 3$ ,  $B_{sv}(2) = 0$ ,  $B_{sv}(3) = -1$ .

Аналогично, при сдвиге сигнала  $v(t)$  в сторону опережения:  
 $B_{sv}(-1) = 1$ ,  $B_{sv}(-2) = 0$ ,  $B_{sv}(-3) = 1$ .

Диаграмма, представляющая функцию взаимной корреляции этих двух сигналов, имеет резко несимметричный вид (рис.2.9).

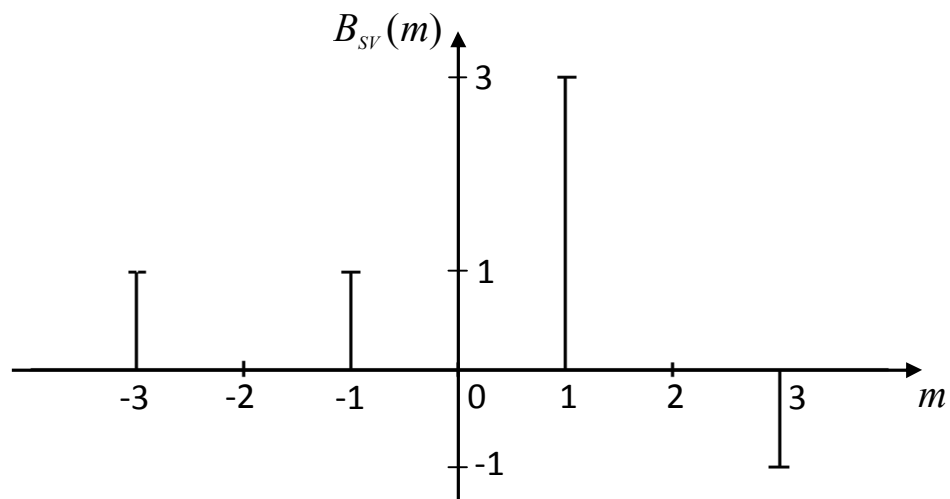


Рис.2.9. Взаимная функция корреляции двух сигналов Баркера.

Максимум функции взаимной корреляции достигается при сдвиге сигнала на одну позицию в сторону запаздывания.

## Контрольные вопросы

1. Какой физический смысл вкладывается в понятие корреляционной функции?
2. Как определяется корреляционная функция непериодического сигнала?
3. Какими свойствами обладает корреляционная функция?
4. Какой вид имеет корреляционная функция сигналов Баркера?
5. Как определяется автокорреляционная функция периодического сигнала?
6. Какой вид имеет корреляционная функция гармонического сигнала?
7. Какой вид имеет корреляционная функция периодической последовательности прямоугольных импульсов?
8. Запишите дискретную функцию автокорреляции для последовательности дискретных отчетов сигнала.
9. С какой целью вычисляют взаимно корреляционную функцию двух различных сигналов?
10. Какими свойствами обладает взаимно корреляционная функция двух сигналов?
11. Как вычисляется взаимно корреляционная функция двух дискретных сигналов?

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В учебно-методическом пособии излагаются основы теории сигналов и преобразований сигналов в средствах информационно-измерительной техники. Особое внимание уделено математическому представлению сигналов, которое допускает эффективную реализацию в различных измерительных процедурах.

В этой связи рассмотрены основные виды сигналов и их математические модели. Подробно рассмотрены вопросы интегральных преобразований сигналов, их представления в различных системах базисных функций.

Для описания сигналов в виде колоколообразных импульсов используются контурный и каркасный способы их представления. Приведены параметры, характеризующие форму колоколообразного импульса.

Для анализа сигналов во временной области с целью выявления и оценки их подобия приведен корреляционный анализ детерминированных сигналов. Рассматривается взаимно корреляционная функция двух сигналов. Произведено обобщение корреляционного анализа на случай дискретных сигналов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: - Высшая школа, 2000. – 462с.
2. Дубнищев Ю.Н. Теория и преобразование сигналов в оптических системах. – Новосибирск: изд-во НГУ, 2004. – 275 с.
3. Стеценко О.А. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. – М.: Высш. шк., 2007. – 432 с.
4. Садовский Г.А. Теоретические основы информационно-измерительной техники – М.: - Высшая школа , 2008. – 478с.
5. Романенко С.В., Стремберг А.Г. Классификация математических моделей аналитических сигналов в форме пиков // Журнал аналитической химии. – 2000. – Т.55, N11, - с. // 44 - // 48.
6. Стремберг А.Г., Селиванова Е.В., Романенко С.В. Моделирование несимметрично аналитического сигнала в виде пика с использованием каркасного способа характеристики его формы на примере инверсной вольтамперометрии // Журнал аналитической химии. – 2004. – Т.59, N8, - с.832-839.
7. Стремберг А.Г., Романенко С.В., Романенко Э.С. Систематическое исследование элементарных моделей аналитических сигналов в виде пиков и волн // Журнал аналитической химии. – 2000. – Т55, N7, - с.687-697.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Основные понятия и способы описания сигналов.....	4
1.1 Основные виды сигналов. Математические модели.....	4
1.2 Энергия и мощность сигналов.....	8
1.3 Линейное пространство сигналов.....	12
1.4 Представление сигналов в комплексной форме. Преобразование Гильберта.....	22
1.5 Контурный и каркасный способы описания сигналов в виде колоколообразных импульсов (пиков).....	25
Контрольные вопросы.....	32
2. Корреляционный анализ детерминированных сигналов.....	33
2.1 Корреляционная функция непериодического сигнала....	33
2.2 Корреляционная функция периодического сигнала.....	38
2.3 Взаимно корреляционная функция двух сигналов.....	40
Контрольные вопросы.....	45
Заключение.....	46
Библиографический список.....	47



*Учебно-методическое пособие. Часть I*

Составитель *САЙФУЛЛИН Раухат Талгатович*

**Преобразование измерительных сигналов**

В авторской редакции

Подписано в печать

Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная.

Тираж 50 экз.